壹、前言

一、研究動機及摘要

騎士周遊問題一直是數學上的經典問題，筆者在今年暑假陪外公下象棋時，想到若棋盤格並非方格狀，而是六邊形棋盤，那麼騎士周遊是否還能有解？因此本研究初探六邊形棋盤上，騎士周遊的封閉迴圈問題。為了有系統性找出更多解答，筆者從文獻回顧的基礎上，提出了原創的「七色棋盤法」，此方法在沒有其他計算工具的輔助下，非常適合用來找出多組封閉迴圈。「七色棋盤法」特別適用於六邊形棋盤，較不利於方格棋盤。筆者希望藉此「七色棋盤法」為日後的騎士周遊問題提供不同的解決方法。

二、研究目的

（一）定義騎士在六邊形棋盤的走法
（二）整理過去文獻中對於騎士周遊的解決辦法
（三）提出便於使用的六邊形棋盤之騎士周遊走法

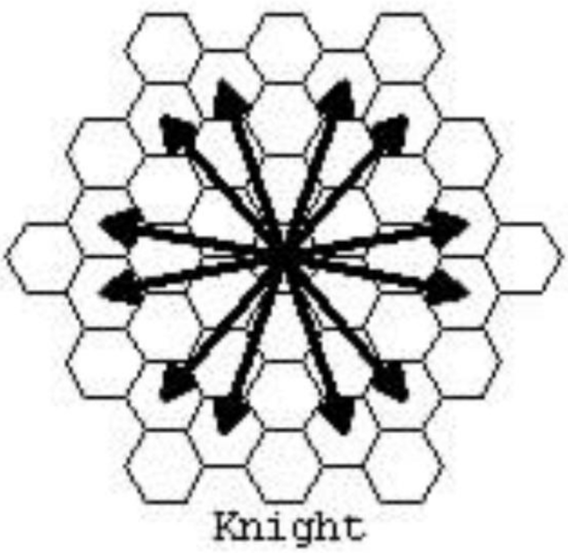
貳、文獻探討

在尋找資料的過程中，對於在六邊形棋盤上的騎士周遊問題，僅有零星的文獻資料，因此本研究同時參考歷屆全國科展作品中，針對方格棋盤上的騎士周遊問題之解法進行回顧。

一、騎士在六邊形棋盤上之走法

典型的六邊形西洋棋中，棋步可以透過兩個相夾 120 度的座標軸表示，騎士以向量 {1,2} 移動，其走法如圖一所示。（George Jelliss，2011）

圖一：六邊形西洋棋的騎士走法



圖一資料來源：George Jelliss（2011 年 4 月）。Honeycomb Boards。
https://www.mayhematics.com/t/ph.htm#(5)

二、六邊形棋盤之討論

George Jelliss（2011）分別給出了六邊形棋盤上，不經過中心點，13 格、19 格（邊長為 3）、37 格（邊長為 4）、43 格、61 格（邊長為 5）的幾種解答，並說明邊長為 4 以上的六邊形棋盤不可能存在軸對稱路徑。

而 G.P. Jelliss 也在 Chessics #7（1979）給出了兩個 91 格（邊長為 6）且過中心點的封閉迴圈，並提到在六邊形棋盤中，騎士走三步可以組成一個三角形迴圈，所以可以透過刪除一步棋，將路徑轉移到三角形形成的格子上，藉此加入原本迴圈所遺漏的格子。

三、「基礎棋盤擴張法」

林承翰在騎士變奏曲（2023）中使用「基礎棋盤擴張法」，以某個連通迴圈作為主要迴圈，在此基礎上，從此圖形之相鄰格子間所延伸出的次連通迴圈，並將主次兩個迴圈合併起來。

四、「棋盤格性質分類法」

張聖德在騎士問題（1989）中將五階方格棋盤格分類，並利用不同類格子之間的連接關係找出可能的迴圈種類，同時利用兩色塗色法判斷解的可能性；對於更高階數的棋盤，則使用了封閉、線對稱、點對稱、四面對稱的性質判斷是否存在滿足此性質之解。

參、研究方法

以有系統性找出更多解答為目的，筆者從文獻中現有的六邊形棋盤走法，試參考方格棋盤上的「基礎棋盤擴張法」以及「棋盤格性質分類法」，套用到六邊形棋盤上。

肆、研究分析與結果

本研究在考慮「基礎棋盤擴張法」、「棋盤格染色法」以及六邊形棋盤的討論文獻後，整合並提出更便利的「七色棋盤法」，以下分述：

一、「基礎棋盤擴張法」

經研究後發現，此方法在六邊形棋盤的情況上較為複雜，需要考慮多樣的變因。由於本研究發現有更利於使用的「七色棋盤法」，在此就不花篇幅討論「基礎棋盤擴張法」在六邊形棋盤上的應用方式。

二、「棋盤格染色法」

根據 Chessics #7（G.P. Jelliss，1979）提出六邊形棋盤染色法，模仿了方格棋盤上的黑白兩色法，在六邊形棋盤上採用三色法。由此可知，騎士每走一步，必定跳躍到另一種顏色上，然而，由於有三種顏色，且騎士可以在這些顏色之間任意跳躍，似乎不容易從中分析出可用的性質。

三、「七色棋盤法」

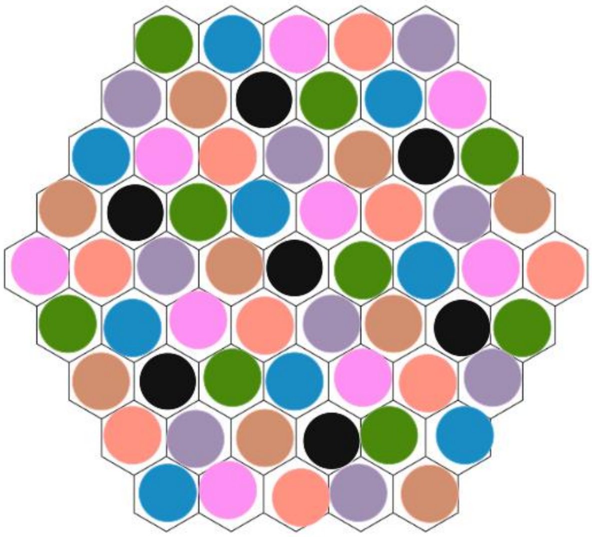
受到「棋盤格性質分類法」以及「棋盤格染色法」的啟發，本研究提出「七色棋盤法」。此方法在沒有其他計算工具的輔助下，非常適合用來找出多組封閉迴圈。

（一）「七色棋盤法」步驟說明

以五階六邊形棋盤為例，具體步驟說明為下：

1. 將棋盤進行染色，使得每種顏色格都會形成多個三角形拼成的網格。

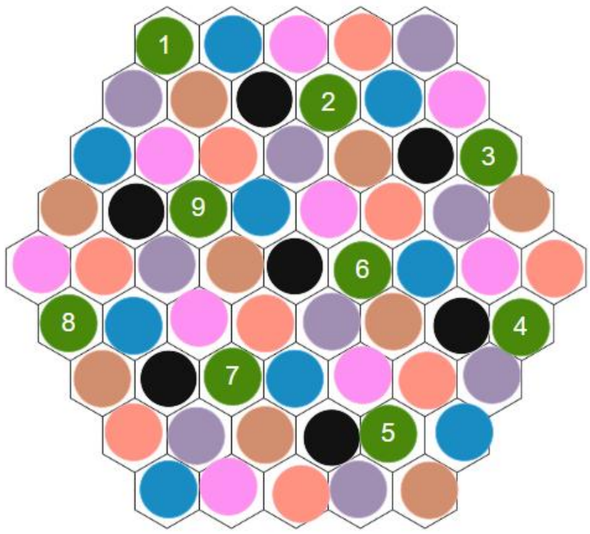
圖二：「七色棋盤法」步驟一說明



圖二資料來源：作者使用 HamHamBone 製作的六邊形網格生成器 https://hamhambone.github.io/hexgrid/，並於 draw.io 繪圖軟體自行加上塗色標記而成。

2. 選擇一種顏色出發（如綠色），走完所有同顏色的格子。

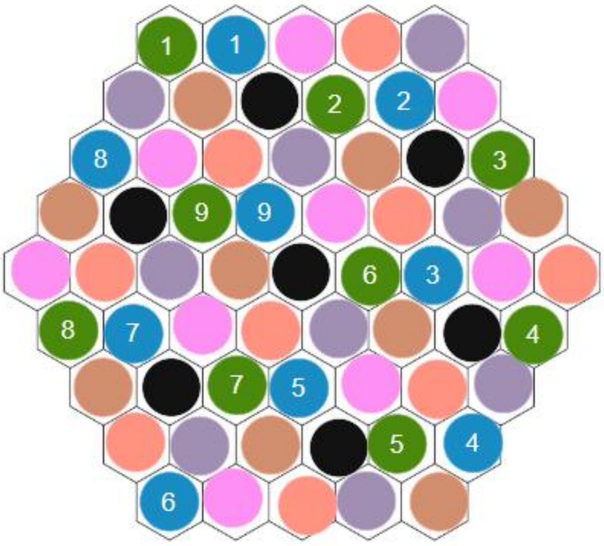
圖三：「七色棋盤法」步驟二說明



圖三資料來源：作者使用 HamHamBone 製作的六邊形網格生成器 https://hamhambone.github.io/hexgrid/，並於 draw.io 繪圖軟體自行加上塗色標記而成。

3. 換到下一個未走過的顏色（如藍色），同樣走完所有同顏色的格子。若無法換到其他顏色，則需要重新調整上個步驟的走法，使得顏色能順利切換。

圖四：「七色棋盤法」步驟三說明



圖四資料來源：作者使用 HamHamBone 製作的六邊形網格生成器 https://hamhambone.github.io/hexgrid/，並於 draw.io 繪圖軟體自行加上塗色標記而成。

4. 重複步驟 3，直到走完所有的格子。（如圖五所示）

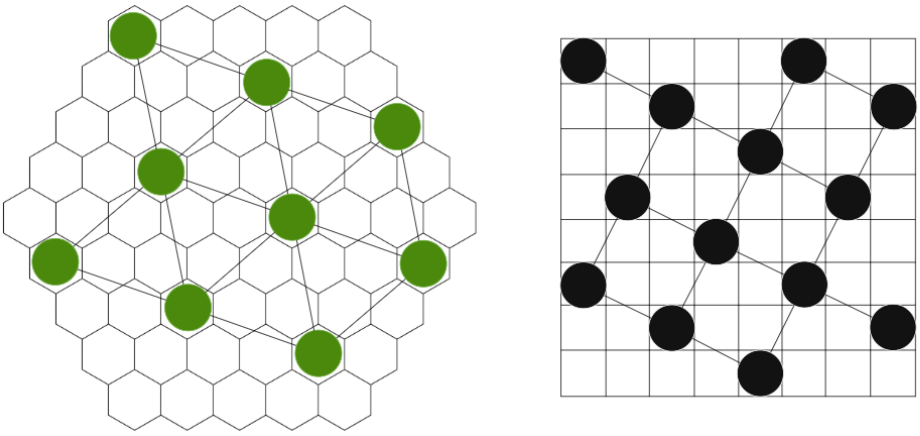
圖五：「七色棋盤法」步驟四說明

圖五資料來源：作者使用 HamHamBone 製作的六邊形網格生成器 https://hamhambone.github.io/hexgrid/，並於 draw.io 繪圖軟體自行加上塗色標記而成。

（二）「七色棋盤法」理論說明

為什麼「七色棋盤法」在前人的文獻中沒有提到？筆者認為是因為，雖然此方法非常適用於六邊形棋盤，但在方格棋盤上反而沒有這麼便利。在六角形棋盤上，騎士可以走三步，形成一個三角迴路，且每個同顏色的格子最多可以往六個方向走，有非常多可能性；但在方格棋盤上，騎士最簡單的走法只能形成方形迴路，在此方法中，最多只有四個方向能走，甚至有機會出現度數為一的頂點，大大限縮了方格棋盤上發現「七色棋盤法」的可能性。

圖六：「七色棋盤法」在六邊形棋盤與方格棋盤上之網格比較



圖六資料來源：作者使用 HamHamBone 製作的六邊形網格生成器 https://hamhambone.github.io/hexgrid/，並於 draw.io 繪圖軟體自行加上塗色標記而成。

（三）「七色棋盤法」特定條件下之封閉迴圈數量計算

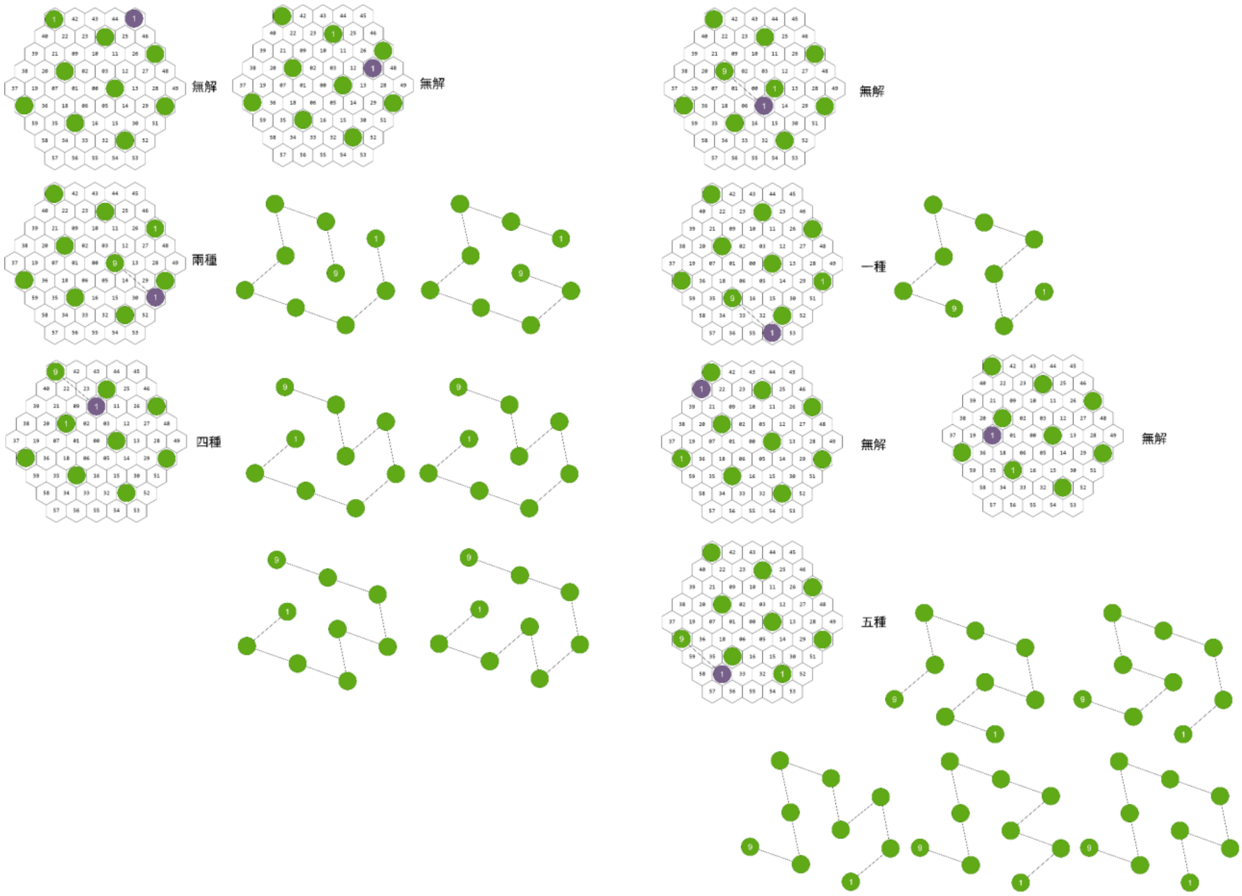
以五階六邊形棋盤為例，黑色格一共七個，剩下六種顏色格都彼此旋轉對稱，故討論黑色格與綠色格即可。

為保持簡潔，我們可以設定騎士需要依照以下規則行走：依序經過紫、橙、棕、藍、粉、綠這六色（分別為六邊形各頂點的順時針順序），並在最後走完黑色格子。此外，前六色的起點終點經選轉後的相對位置需要一樣。

1. 綠色格子的銜接

考慮所有綠色之起點的可能位置，並找出相對應的紫色終點，考慮是否有綠色終點可接至紫色起點，並計算路徑總數。此銜接一共有 4 種起點終點的分布情況，包含 12 種走法。

圖七：綠色格子的銜接種類

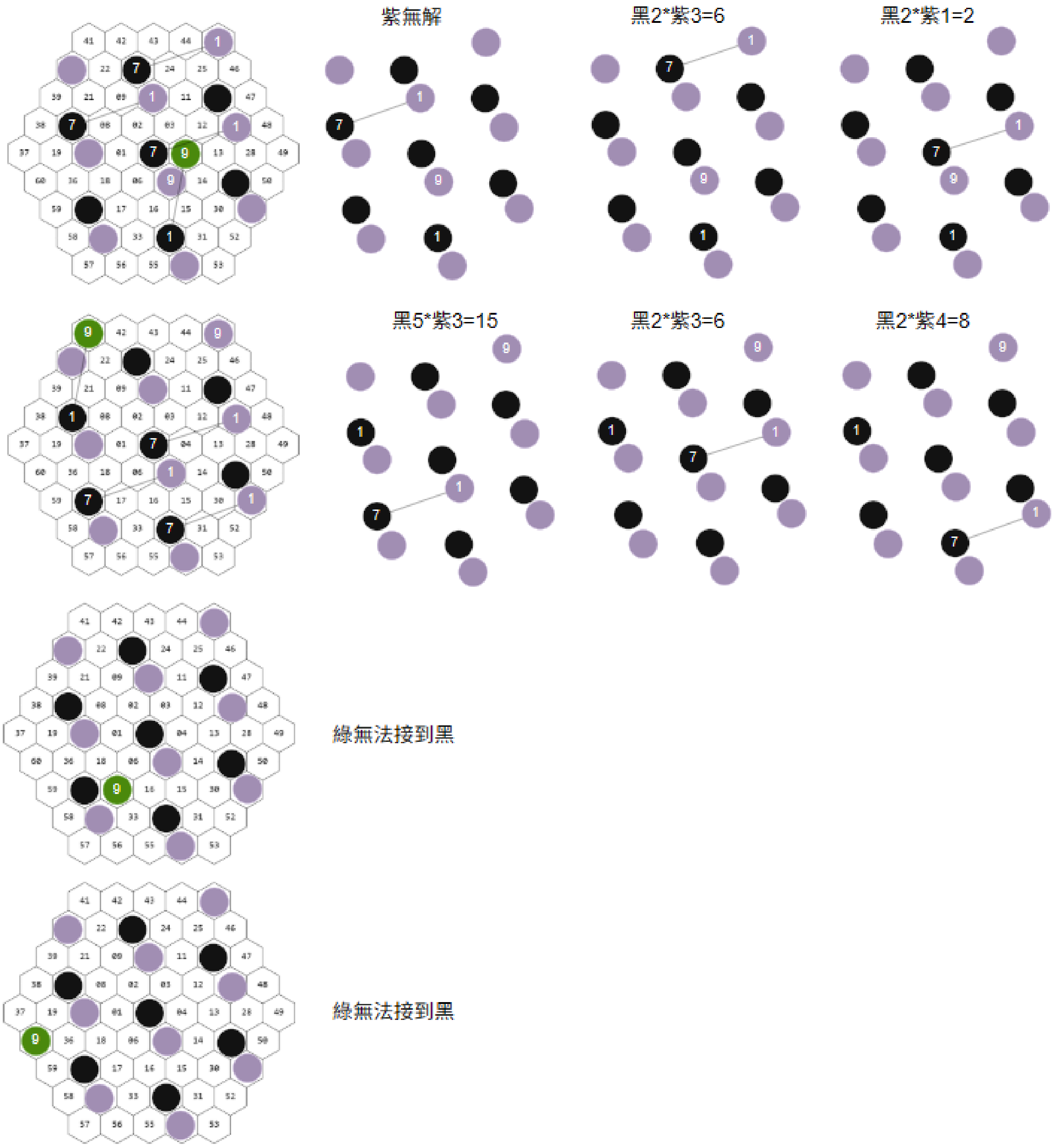


圖七資料來源：作者使用 HamHamBone 製作的六邊形網格生成器 https://hamhambone.github.io/hexgrid/，並於 draw.io 繪圖軟體自行加上塗色標記而成。

2. 黑色格子的銜接

雖然六色間有 4 種起點終點的分布情況，包含 12 種走法，但實際上能接到黑色格子、並讓紫色格子順利往下接的，黑格及紫格的路徑只有 2 種起點終點分布情況，分別包含 8 種及 29 種走法。

圖八：黑格及紫格的銜接種類



圖八資料來源：作者使用 HamHamBone 製作的六邊形網格生成器 https://hamhambone.github.io/hexgrid/，並於 draw.io 繪圖軟體自行加上塗色標記而成。

3. 總數計算

一共有 29,952 個封閉迴圈可滿足以下條件：騎士依序經過紫、橙、棕、藍、粉、綠這六色，且這六色的起點終點的相對位置一樣，並在最後走完黑色格子，並接回紫色起點形成封閉迴圈，其中每個解都可以輕易畫出來。

圖九：滿足條件之封閉迴圈數量計算

圖九資料來源：作者使用 draw.io 繪圖軟體自行繪製。

伍、研究結論與建議

一、本研究受到「棋盤格性質分類法」、「棋盤格染色法」以及六邊形棋盤的討論文獻啟發，提出了「七色棋盤法」的具體步驟。此方法在沒有其他計算工具的輔助下，非常適合用來找出多組封閉迴圈。

二、使用「七色棋盤法」在五階棋盤上，並限制了騎士的顏色行經順序與其起點位置後，仍可找出 29,952 種互不相同的封閉迴圈，且每種都可以輕易畫出。日後的研究可以建立在此基礎上，考慮七種顏色排出的迴圈與其個數；或著進一步考慮不要一次走完同顏色格子的情況，將會發掘更多路徑。

三、起初在尋找解的數量時，筆者也嘗試使用程式計算四階棋盤的迴圈數量，希望藉此計算「七色棋盤法」提供的覆蓋率。由於所需的計算量太高，電腦連續計算數天仍沒有找出解答總數，希望日後能結合更進階的數學性質，減少所需的計算量。

陸、參考文獻

林承翰、吳承駿（2023）。**騎士變奏曲**。中華民國第六十三屆中小學科學展覽會

張聖德、張澍元、韓宇軒（1989）。**騎士問題**。中華民國第二十九屆中小學科學展覽會國中數學組第二名。

George Jelliss（2011）. *Honeycomb Boards*. https://www.mayhematics.com/t/ph.htm#(5).

G.P. Jelliss（1979）. *Chessics #7*. G.P. Jelliss.